Инженерная и компьютерная графика
6 семестр (диф.зачет)

Лектор:

Таранцев Игорь Геннадьевич

Доцент ФИТ НГУ, ИАиЭ, «СофтЛаб-НСК»

Создатели курса:

Дебелов Виктор Алексеевич

Валеев Тагир Фаридович

Козлов Дмитрий Сергеевич

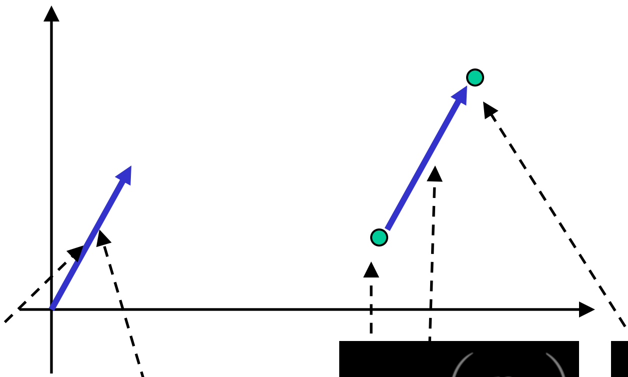
Лекция №6

Элементы вычислительной геометрии
на плоскости и в пространстве;
барицентрические координаты;
разбиение единицы; триангуляция

Плоскость

- Точки
- Векторы
- Отрезки
- Лучи
- Прямые
- Углы

Вспоминаем точки, векторы



$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

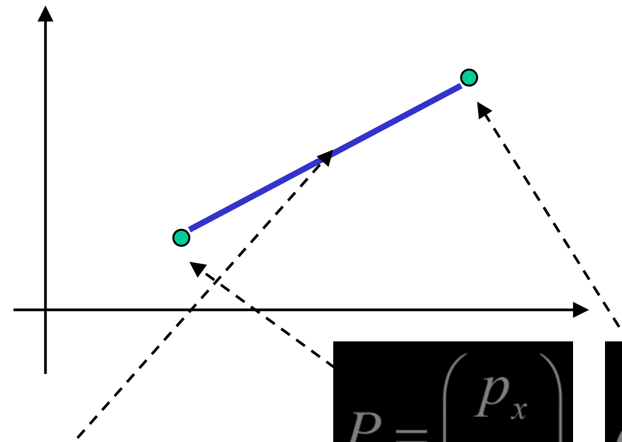
- Точки
- Евклидово расстояние между двумя точками

$$\rho(P,Q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2} = |P - Q|$$

- *Вектор* – это направленный отрезок, начинающийся в начале системы координат

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \qquad \left|\overline{R}\right| = \sqrt{r_x^{\ 2} + r_y^{\ 2}} \qquad \overline{R} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \end{pmatrix}$$

Отрезок



$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

- Задание двумя концами (параметрическое)

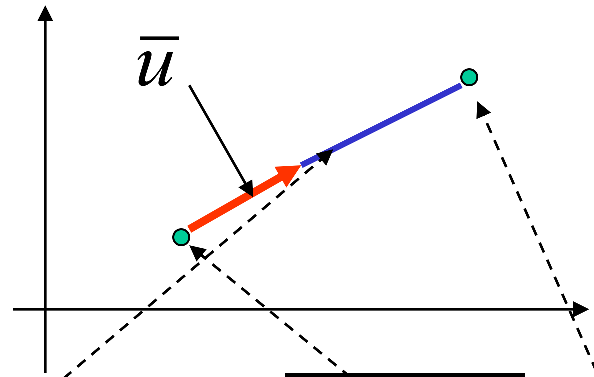
$$S(P,Q,t) = (1-t)P + tQ,\ t \in [0,1]$$

- Отметим, что по такому представлению можно говорить об ориентации отрезка:

$$S(P,Q,t)$$
$$S(Q,P,t)$$

- В дальнейшем мы не будем применять отдельные специальные обозначения для вектора, точки или отрезка, если по контексту будет понятно, о чем идет речь.

Отрезок



$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

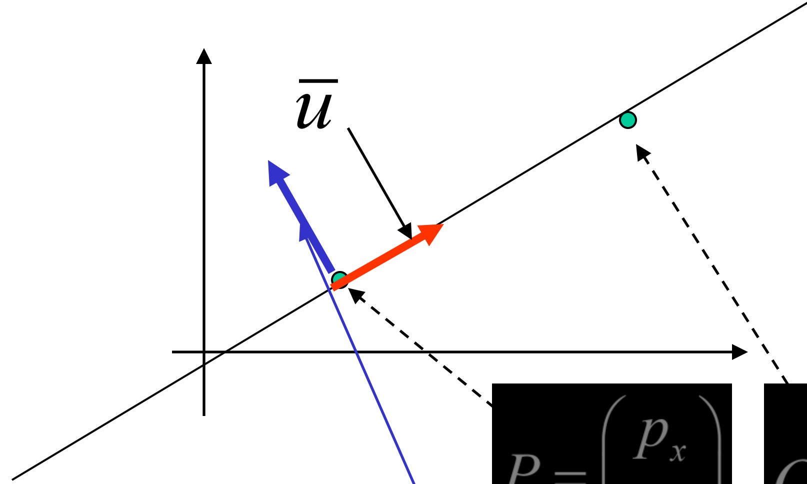
$$Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + tu_x \\ p_y + tu_y \end{pmatrix}$$

- Задание начальной точкой и направляющим вектором

$$S(P,\overline{u},t) = P + t \cdot \overline{u},\ t \in [0,a]$$

- Если длина вектора 1, то длина отрезка $= a$
- Если $a = \infty$, то это ***луч***

Прямая



$$P=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}q_x\\q_y\end{pmatrix}$$

- Через 2 точки

$$L(P,Q,t)=(1-t)P+tQ,\ t\in[-\infty,+\infty]$$

- Задание точкой и направляющим вектором

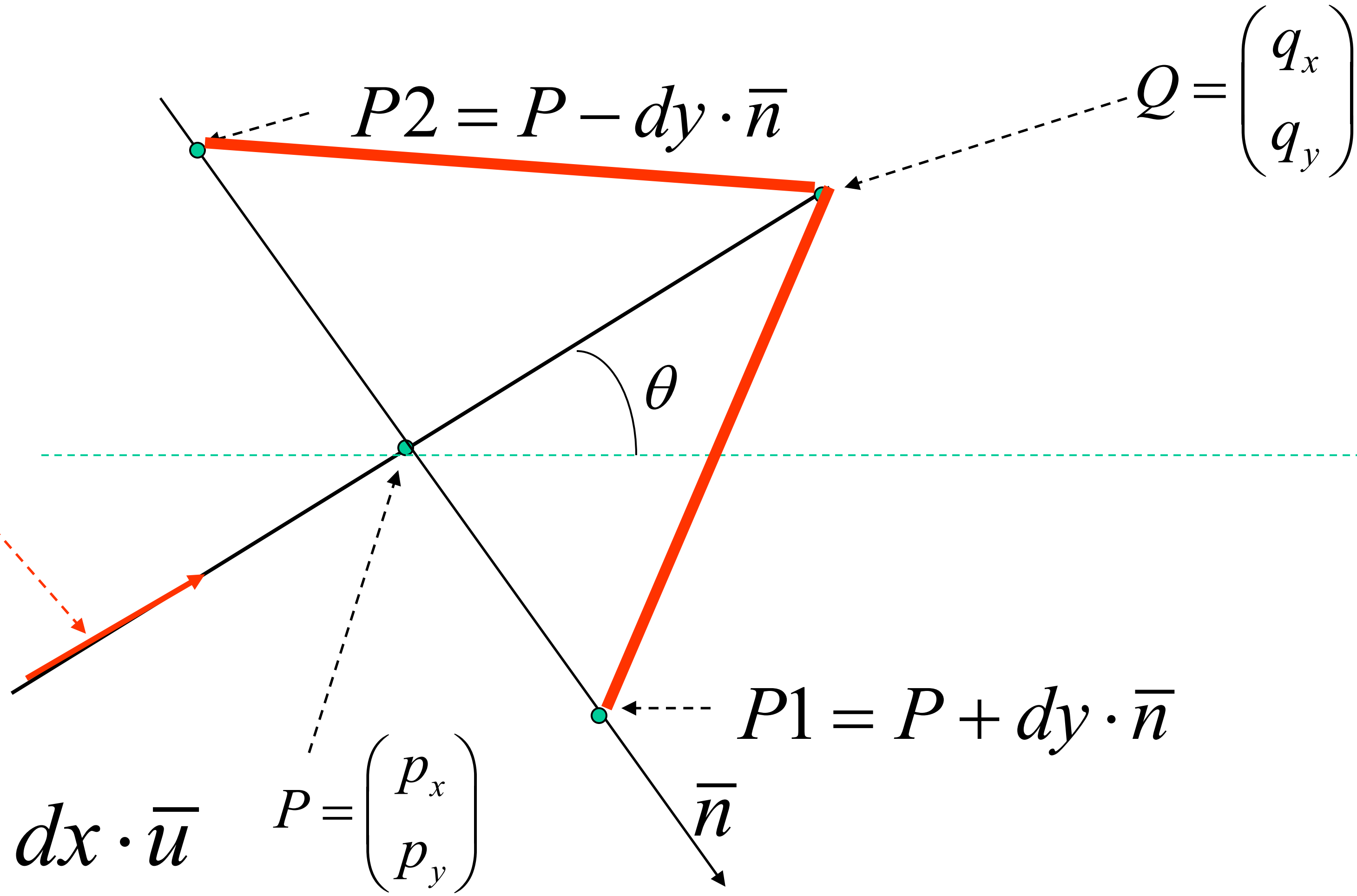
$$\overline{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}$$

$$L(P,\overline{u},t)=P+t\cdot\overline{u},\ t\in[-\infty,+\infty]$$

- Тогда нормаль к прямой

$$\overline{n}=\begin{pmatrix}n_x\\n_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u_y\\u_x\end{pmatrix}$$

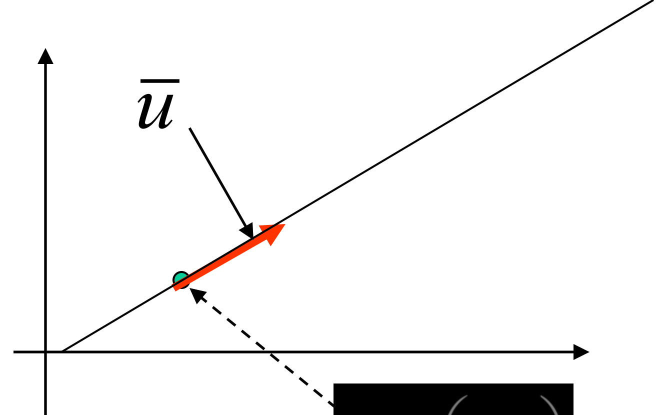
Рисование стрелки
(без тригонометрии)



$$P = Q - dx \cdot \overline{u}$$

Прямая

ориентация



$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

- Уравнение гиперплоскости

$$L(a,b,c) :: ax + by + c = 0$$

- Переход к параметрическому

$$L(P,\overline{u},t) = P + t\cdot\overline{u},\ t \in \left[-\infty, +\infty\right]$$

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$L(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-ac}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-bc}{a^2+b^2} \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$$

- Нормаль

$$\left(P - P_0, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = 0$$

Расстояние

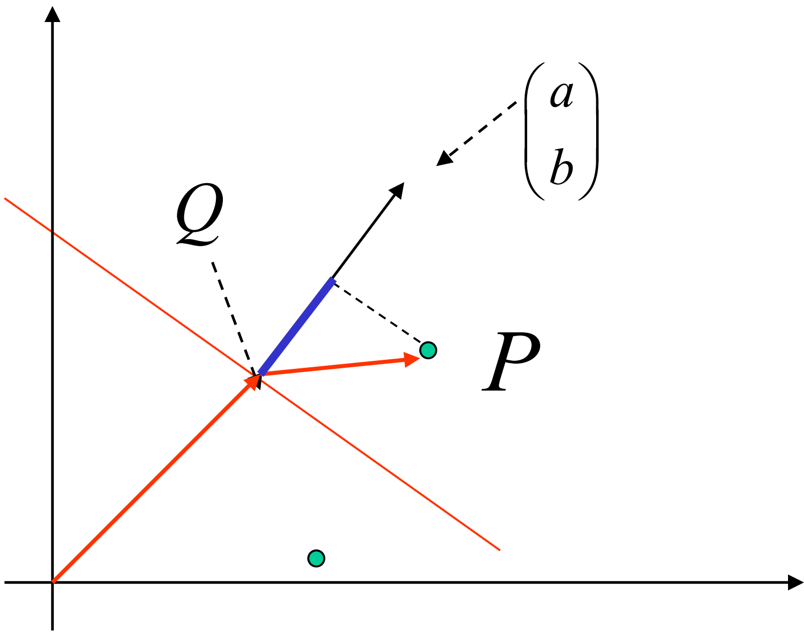
$$\rho(P,L)=\frac{a\cdot p_x+b\cdot p_y+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

От точки до прямой (знак!)

$$\rho=\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},P\right)+c=(\bar{n},P)+c=$$

$$=\left(\bar{n},Q+\overline{QP}\right)+c=(\bar{n},Q)+c+\left(\bar{n},\overline{QP}\right)=$$

$$=-c+c+\left(\bar{n},\overline{QP}\right)=\left(\bar{n},\overline{QP}\right)$$



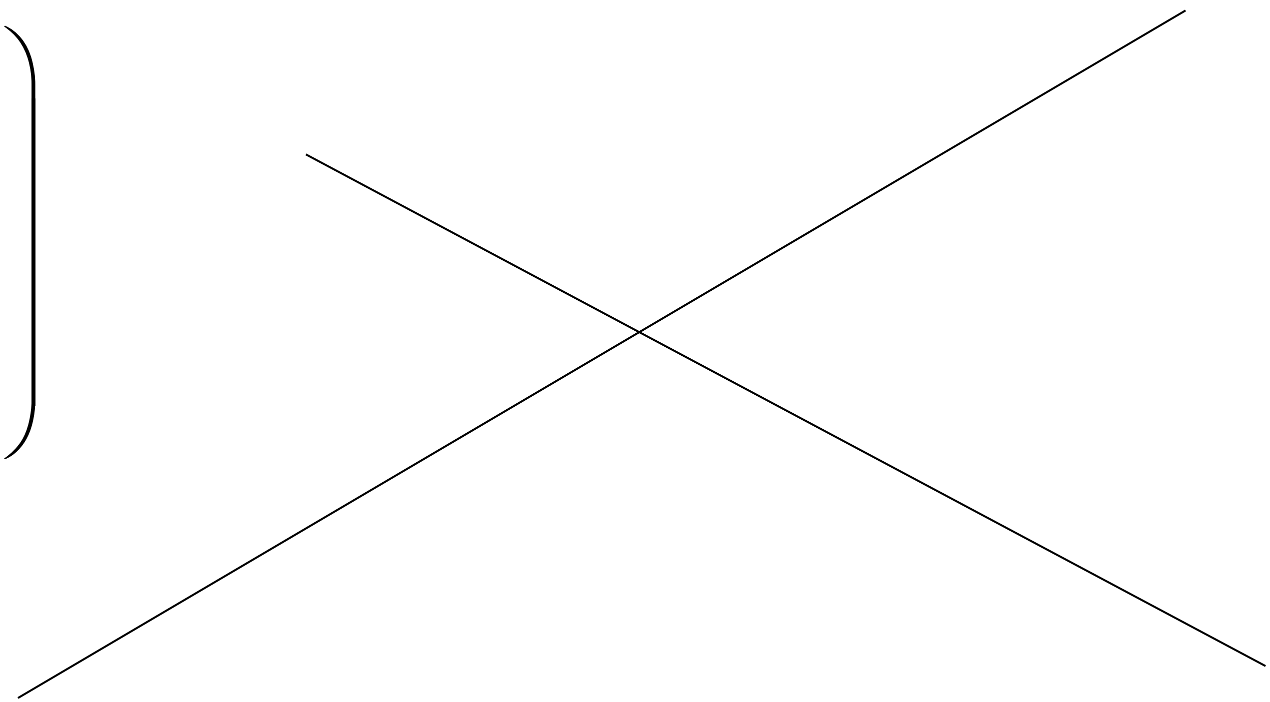
Пересечение двух прямых

$$L(a_1, b_1, c_1)$$

$$L(a_2, b_2, c_2)$$

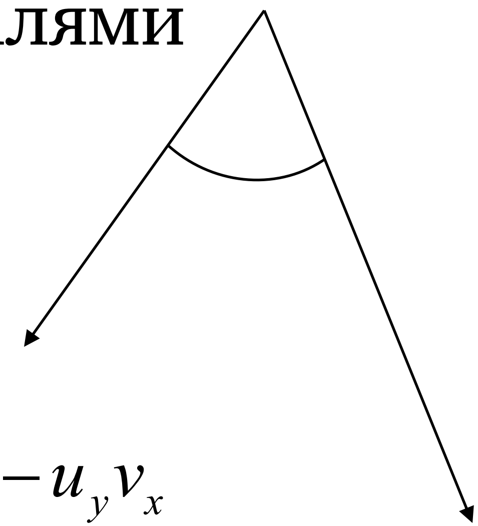
$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ — параллельны

$$\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$



Углы

- Между прямыми = между нормалями
- Угол между векторами



$$\cos(\bar{u},\bar{v}) = \frac{(\bar{u},\bar{v})}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}$$

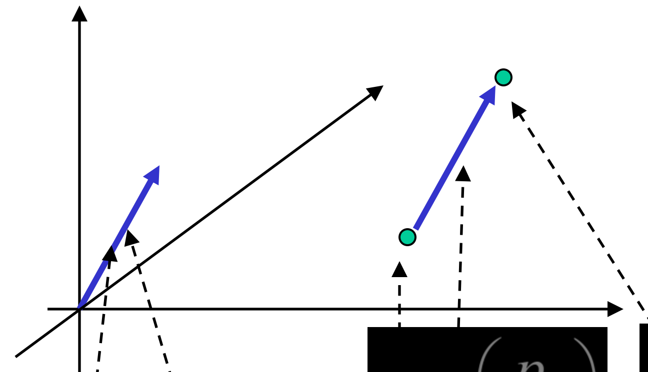
$$\sin(\bar{u},\bar{v}) = \frac{\bar{u}\times\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \frac{u_x v_y - u_y v_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$

$$\sin(\bar{u},\bar{v}) = -\sin(\bar{v},\bar{u})$$

Пространство

- Точки
- Векторы
- Отрезки
- Лучи
- Прямые
- Углы
- Плоскости, полуплоскости, плоские фигуры

Вспоминаем точки, векторы



$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

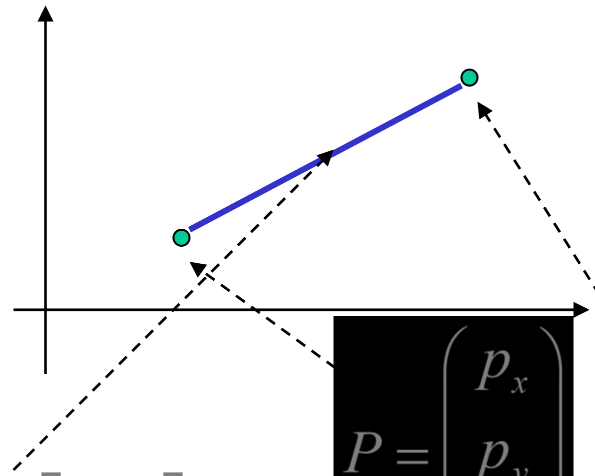
- Точки
- Евклидово расстояние между двумя точками

$$\rho(P,Q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2 + (p_z - q_z)^2} = |P - Q|$$

- *Вектор* – это направленный отрезок, начинающийся в начале системы координат

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \qquad |\bar{R}| = \sqrt{r_x^{\,2} + r_y^{\,2} + r_z^{\,2}} \qquad \bar{R} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix}$$

Отрезок



- Задание двумя концами (параметрическое)

$$S(P,Q,t)=(1-t)P+tQ,\ t\in[0,1]$$

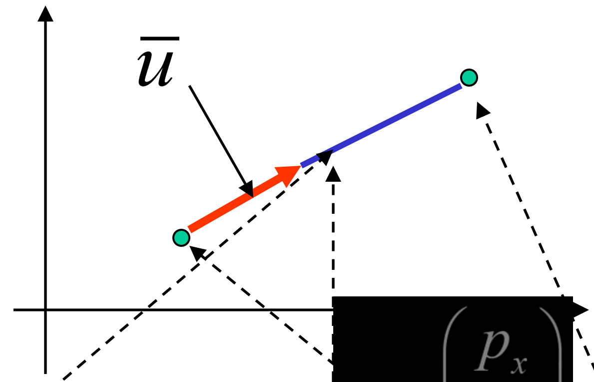
$$P=\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

- Отметим, что по такому представлению можно говорить об ориентации отрезка:

$$S(P,Q,t)$$
$$S(Q,P,t)$$

- В дальнейшем мы не будем применять отдельные специальные обозначения для вектора, точки или отрезка, если по контексту будет понятно, о чем идет речь.

Отрезок



$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

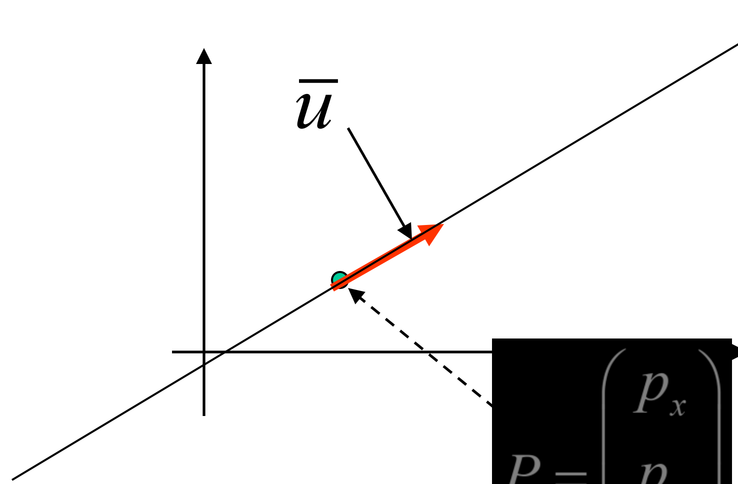
$$Q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + tu_x \\ p_y + tu_y \\ p_z + tu_z \end{pmatrix}$$

- Задание начальной точкой и направляющим вектором

$$S(P, \overline{u}, t) = P + t \cdot \overline{u},\ t \in [0, a]$$

- Если длина вектора 1, то длина отрезка $= a$
- Если $a = \infty$, то это ***луч***

Прямая



$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

- Через 2 точки

$$L(P,Q,t) = (1-t)P + tQ,\ t \in [-\infty, +\infty]$$

- Задание точкой и направляющим вектором

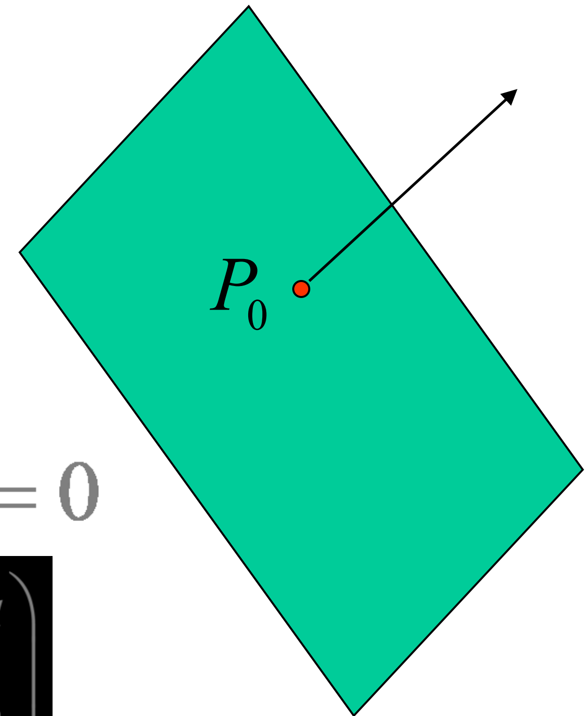
$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$L(P,\overline{u},t) = P + t \cdot \overline{u},\ t \in [-\infty, +\infty]$$

- Нормаль к прямой — это целая плоскость
- И наконечник стрелки так же не нарисуешь как на плоскости!

Плоскость

ориентация



- Уравнение гиперплоскости

$$\Pi(a,b,c) :: ax + by + cz + d = 0$$

- Нормаль

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\left(P - P_0, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = 0$$

Расстояние

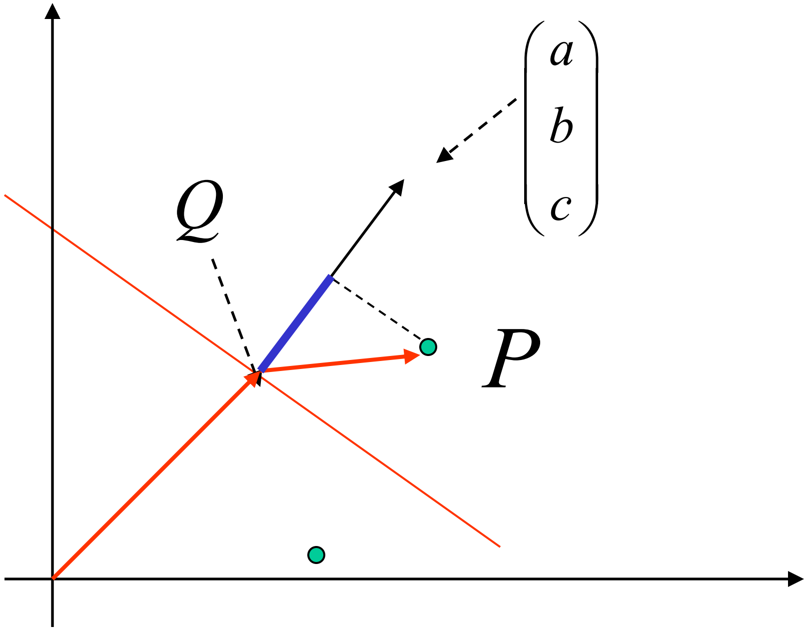
$$\rho(P,\Pi)=\frac{a\cdot p_x+b\cdot p_y+c\cdot p_z+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

От точки до плоскости (знак!)

$$\rho=\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},P\right)+d=(\overline{n},P)+d=$$

$$=\left(\overline{n},Q+\overline{QP}\right)+d=(\overline{n},Q)+d+\left(\overline{n},\overline{QP}\right)=$$

$$=-d+d+\left(\overline{n},\overline{QP}\right)=\left(\overline{n},\overline{QP}\right)$$

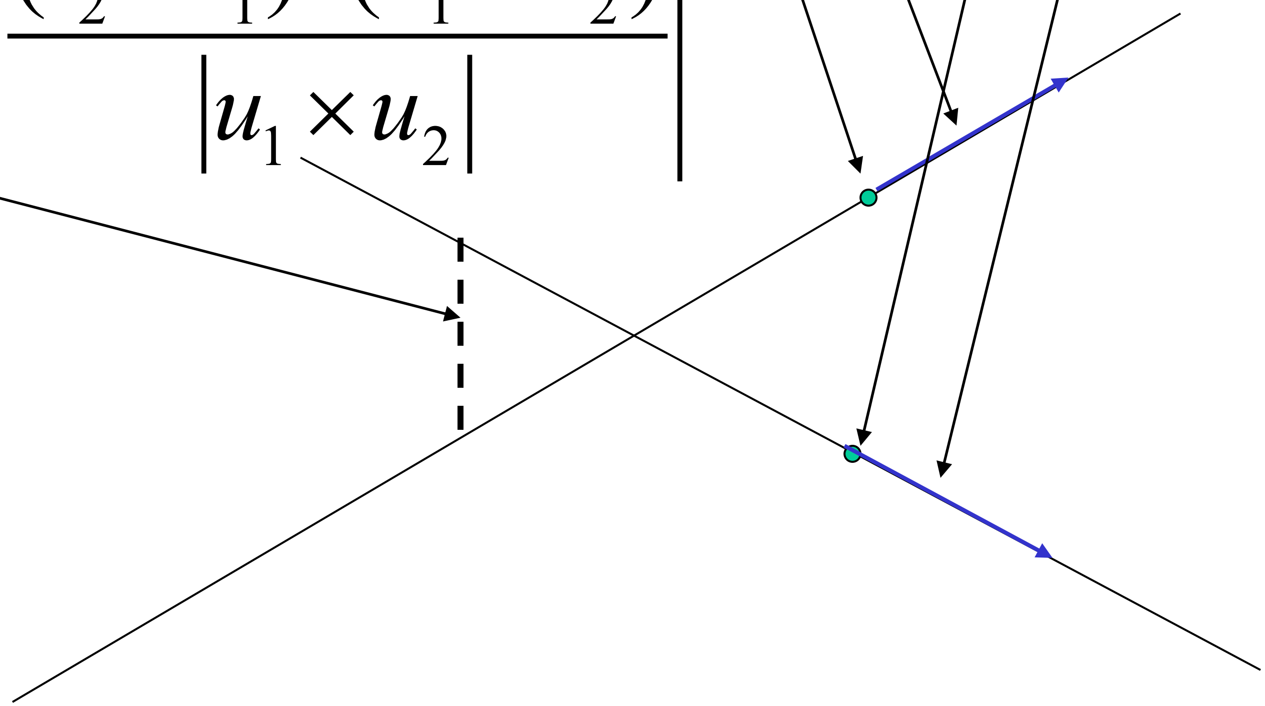


Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$L_1(r_1, u_1, t)$$

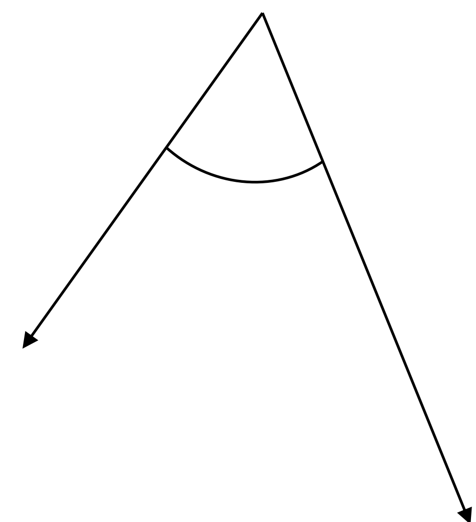
$$L_2(r_2, u_2, s)$$

$$\rho(L_1, L_2) = \left| \frac{(r_2 - r_1)\cdot(u_1 \times u_2)}{|u_1 \times u_2|} \right|$$



Углы

- Между плоскостями = между нормалями
- Угол между векторами

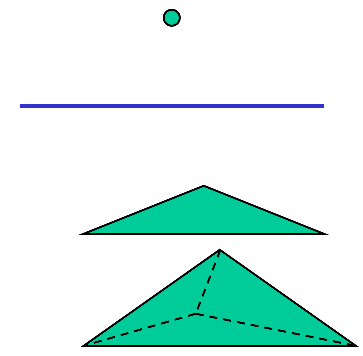


$$\cos(\overline{u},\overline{v}) = \frac{(\overline{u},\overline{v})}{|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|}$$

$$\sin(\overline{u},\overline{v}) = \frac{\overline{u}\times\overline{v}}{|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}}{|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|}$$

$$\sin(\overline{u},\overline{v}) = -\sin(\overline{v},\overline{u})$$

Симплексы

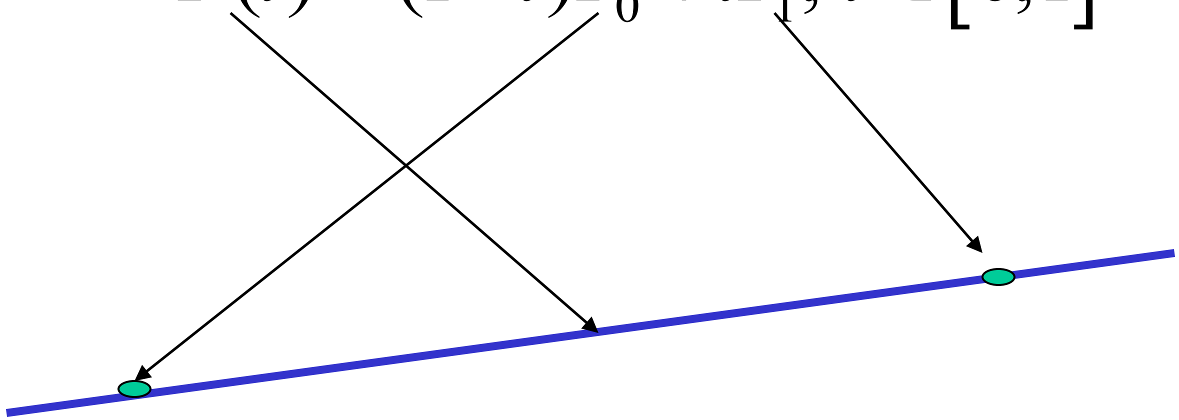


- 0 – точка
- 1 – отрезок
- 2 – треугольник
- 3 – тетраэдр
- имеет *ориентацию*. Когда мы увидим, что это его свойство никак не мешает, а в большинстве случаев даже помогает, то нам захочется, чтобы свойство ориентации имели и другие геометрические элементы. Прежде, чем мы начнем с этим разбираться, давайте, рассмотрим «*барицентрические координаты*».
- Характеристическая функция

Барицентрические координаты

Отрезок

$$P(t) = (1-t)P_0 + tP_1,\ t \in [0,1]$$



$$P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

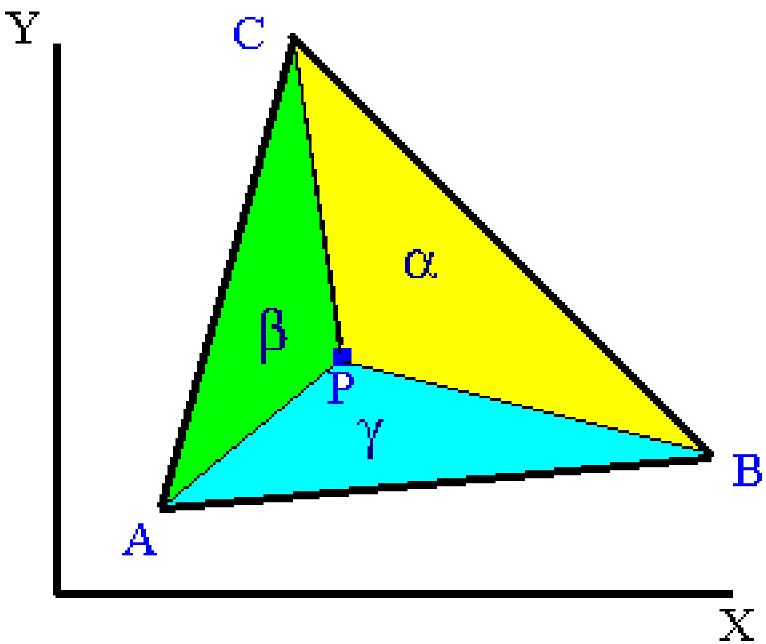
$$Area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left[(b_x - a_x) \cdot (c_y - a_y) - (c_x - a_x) \cdot (b_y - a_y) \right]$$

Барицентрические координаты

Треугольник

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$\alpha + \beta + \gamma = 1 \qquad 1 \geq \alpha, \beta, \gamma \geq 0$



$$\alpha = Area(PBC) / Area(ABC)$$
$$\beta = Area(APC) / Area(ABC)$$
$$\gamma = Area(ABP) / Area(ABC)$$

$$P = \sum_i \lambda_i P_i$$

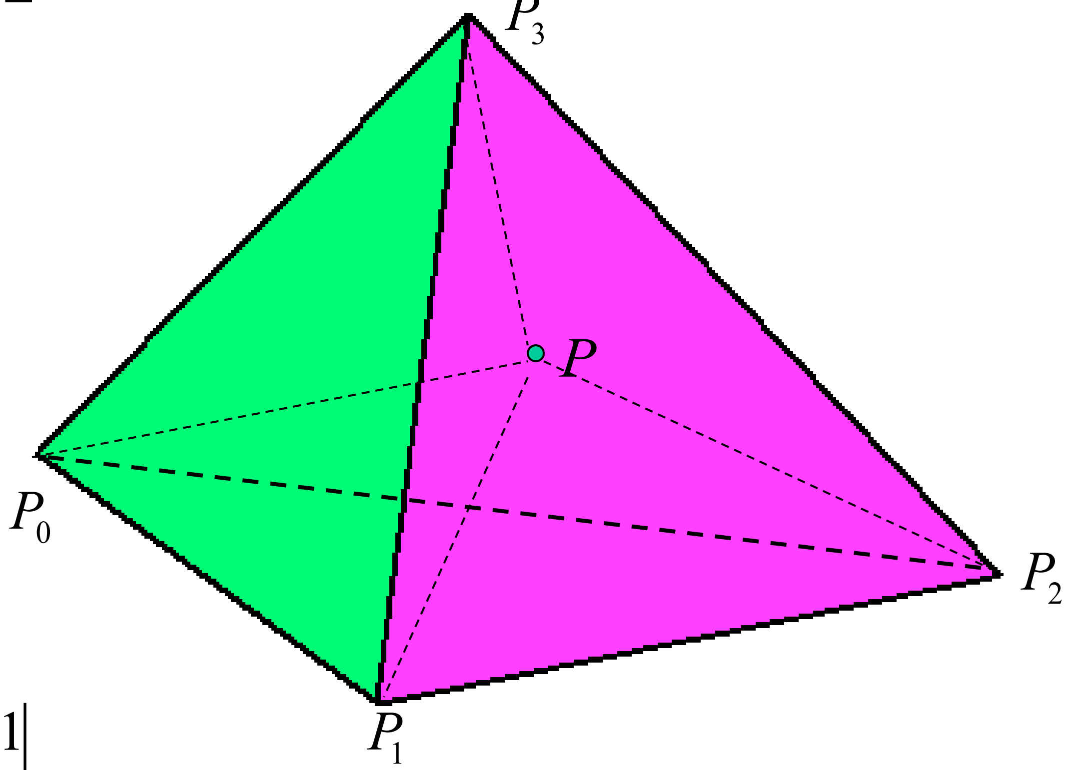
$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

Барицентрические координаты

Тетраэдр

$$P = \sum_i \lambda_i P_i$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$



$$V(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\big((P_1 - P_0), (P_2 - P_0), (P_3 - P_0)\big)$$

$$\lambda_1 = \frac{V(P_0, P, P_2, P_3)}{V(P_0, P_1, P_2, P_3)} \quad \lambda_2 = \frac{V(P_0, P_1, P, P_3)}{V(P_0, P_1, P_2, P_3)} \quad \lambda_3 = \frac{V(P_0, P_1, P_2, P)}{V(P_0, P_1, P_2, P_3)}$$

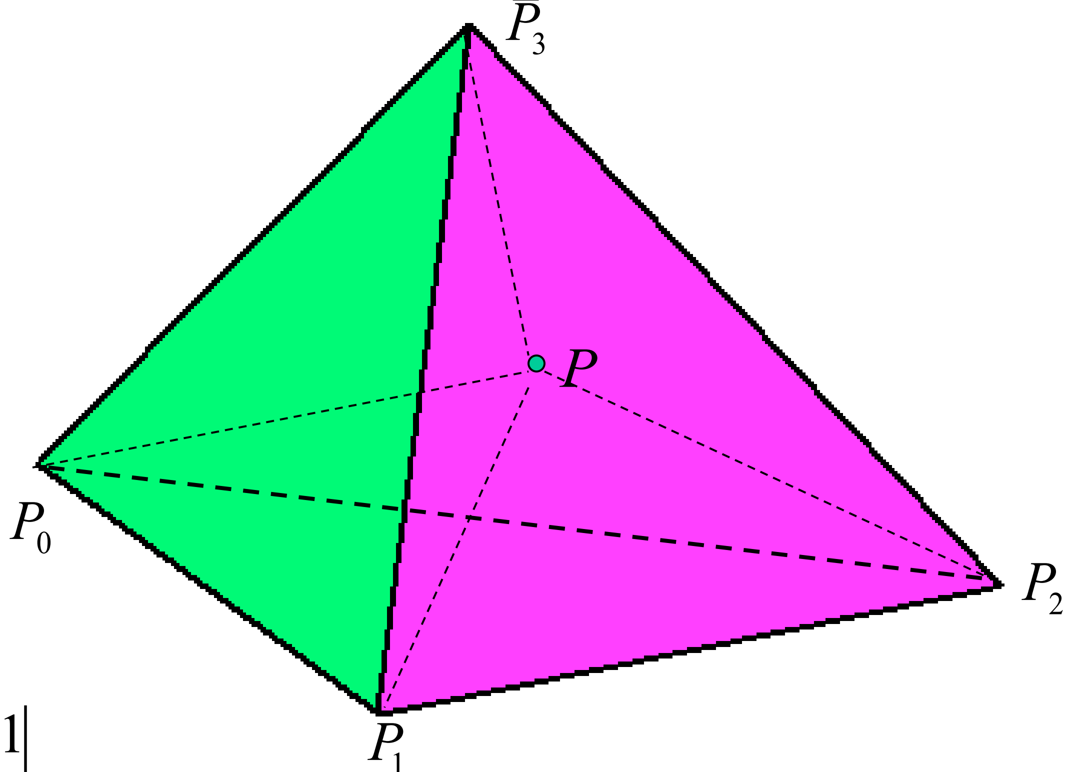
Барицентрические координаты

Тетраэдр

$$P = \sum_i \lambda_i P_i$$

$$\lambda_i \geq 0, \ \ \sum_i \lambda_i = 1$$

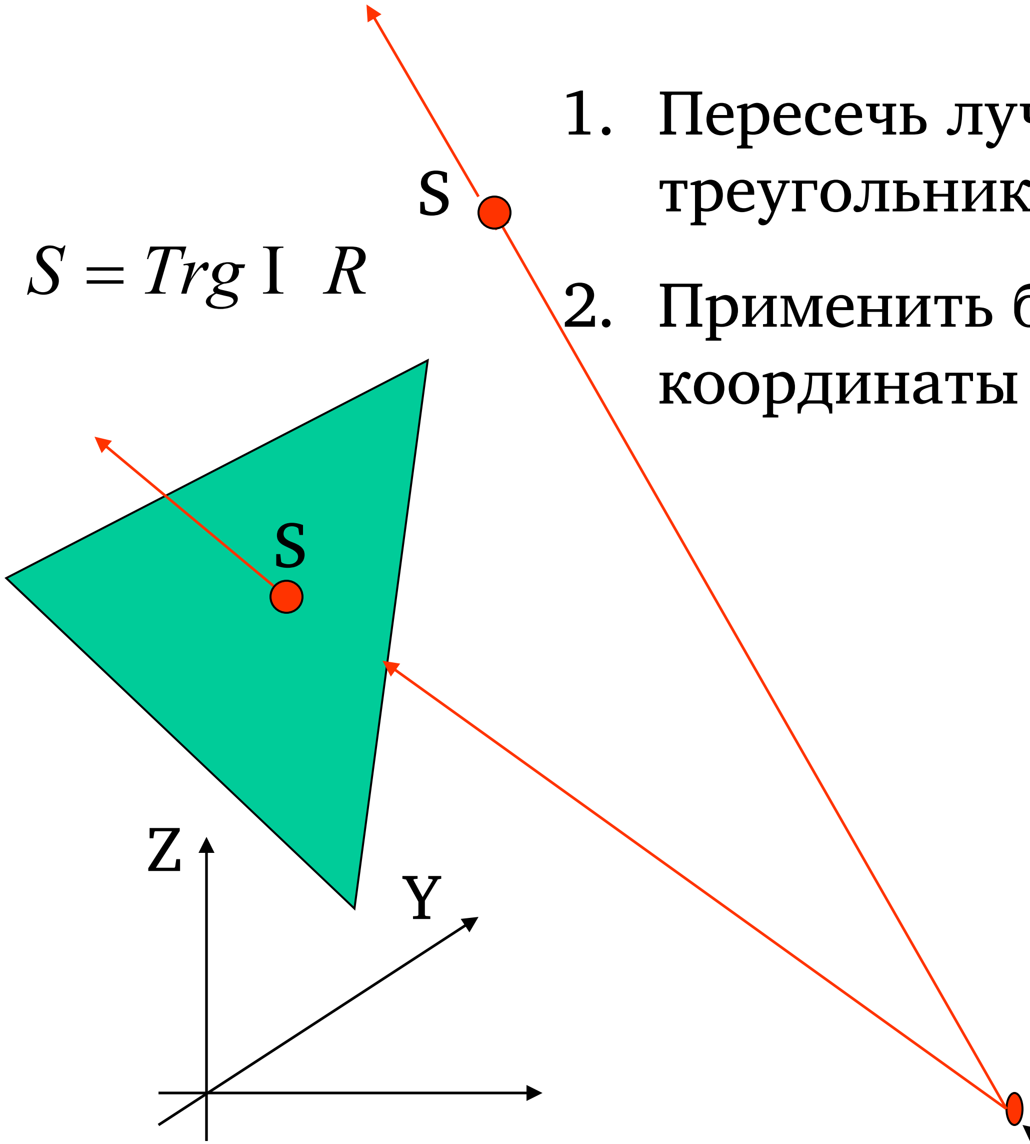
$$\lambda_0 = \frac{V(P, P_1, P_2, P_3)}{V(P_0, P_1, P_2, P_3)}$$



$$V(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\big((P_1 - P_0),(P_2 - P_0),(P_3 - P_0)\big)$$

Пересечение луча с треугольником

$$S = Trg \cap R$$



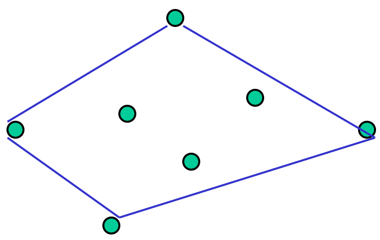
$$R = \left\{ P + t \cdot \overline{u} \right\}$$

1. Пересечь луч с плоскостью треугольника – точка ***S***
2. Применить барицентрические координаты

Разбиение единицы

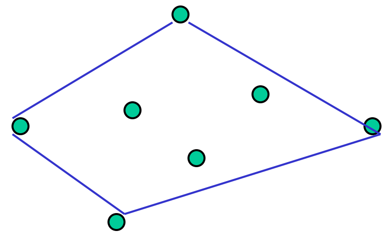
- Выпуклая оболочка для *n* точек.
- Имеем *n* точек в пространстве $P_1, \ldots, P_n$
- и *n* чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и они от 0 до 1. При этом $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$
- Тогда точка $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot P_i$

  лежит внутри или на границе выпуклой оболочки исходных точек



Разбиение единицы

- Доказательство по индукции.
- Для отрезка верно.
- Пусть верно для n $\longrightarrow P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot P_i$
- Докажем для n + 1, что
- $P = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot P_i$
- лежит внутри оболочки $P_1, \ldots, P_{n+1}$



$$P = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot P_i$$

Разбиение единицы

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot P_i + \lambda_n \cdot P_n + \lambda_{n+1} \cdot P_{n+1}$$

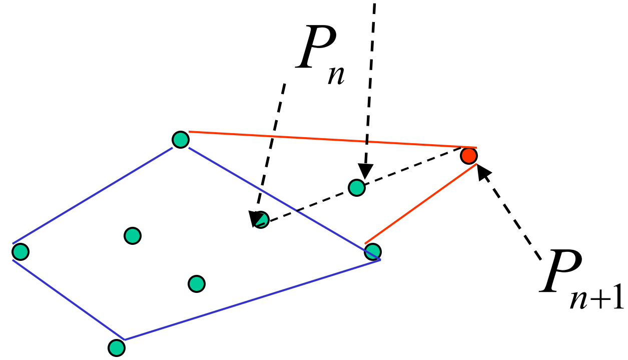
$$P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot P_i$$

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot P_i + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \cdot (\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} P_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot P_{n+1})$$

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot P_i + \lambda_n^1 \cdot P_n^1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \lambda_n^1 = 1$$

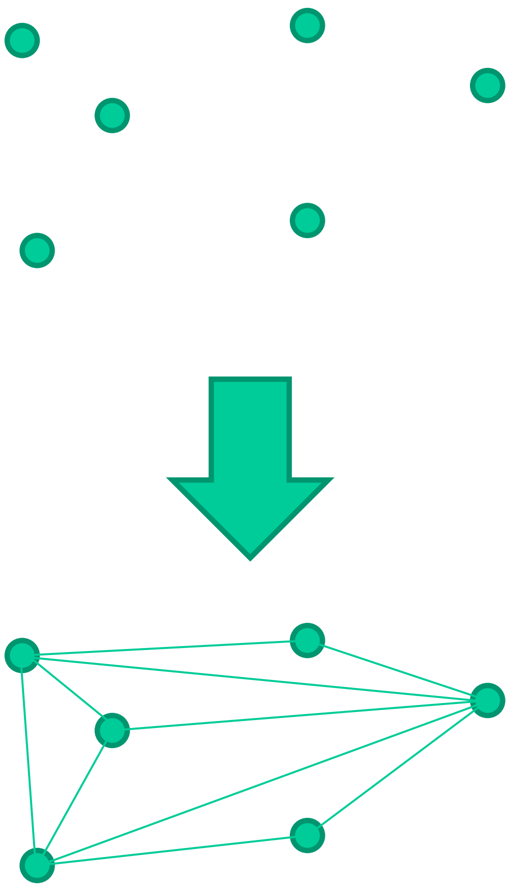
$$0 \le \lambda_n^1 \le 1$$



Триангуляция

- Триангуляция множества точек — разбиение плоскости (пространства) на множество треугольников (симплексов), вершины которых принадлежат заданному множеству точек
- Триангуляция полигона — разбиение полигона на множество треугольников

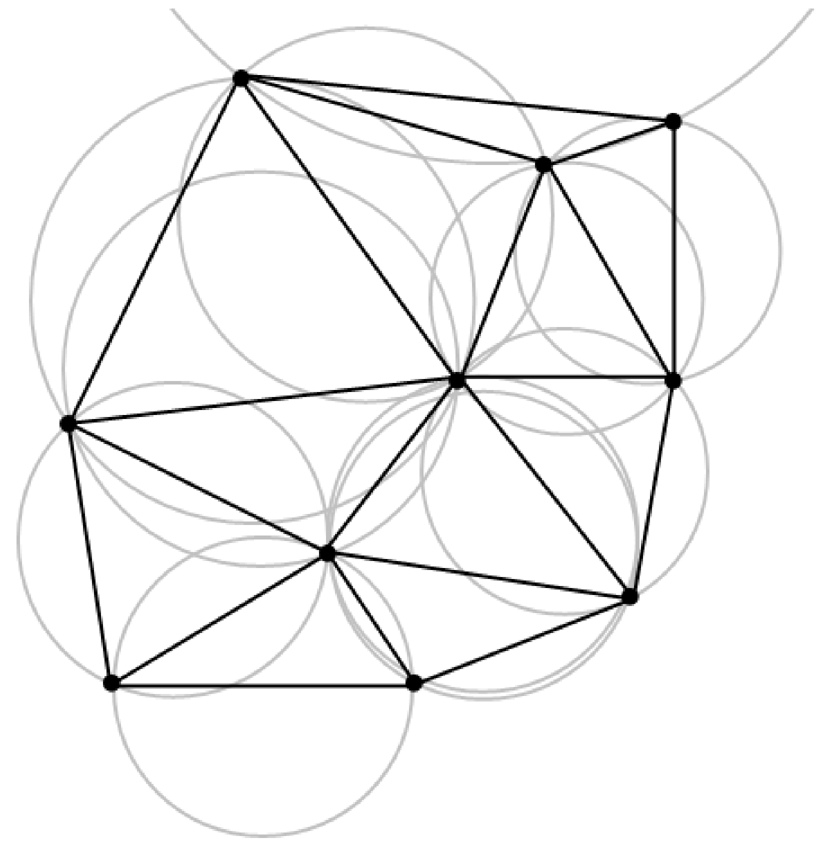
Триангуляция множества точек



- Разбиение плоскости (пространства) на множество треугольников (симплексов), вершины которых принадлежат заданному множеству точек
- Представляет собой частный случай планарного графа с прямыми рёбрами
- Триангуляция рельефа (рельеф задан в виде полигонов-изолиний, либо нерегулярная карта высот)
- Бывают случайные триангуляции и триангуляции с особыми свойствами

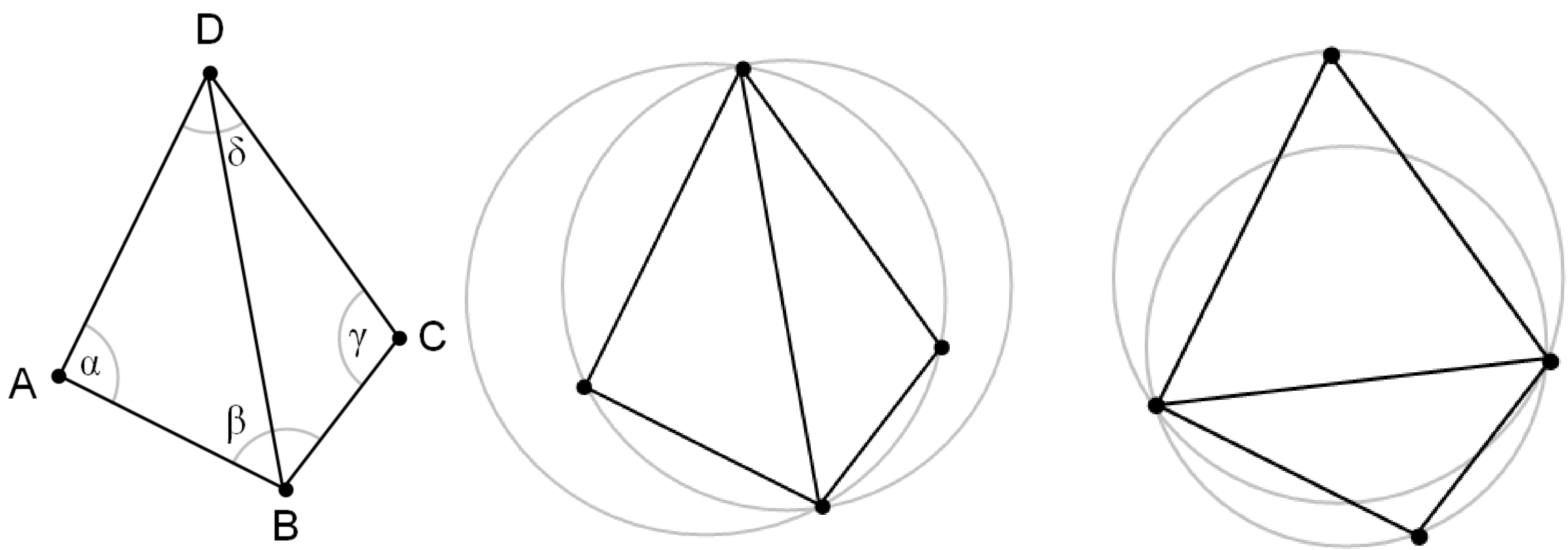
Триангуляция Делоне

- Триангуляция Делоне (Delaunay triangulation) — триангуляция, при которой для любого треугольника ни одна точка исходного множества не лежит внутри окружности описанной около треугольника (хотя может лежать на самой окружности)
- Такая триангуляция всегда существует на плоскости и в Евклидовом пространстве для любого набора точек, если они все не лежат на одной прямой
- Если 4 или больше точек лежат на одной окружности, возможно несколько триангуляций Делоне.
- Объединение полученных треугольников (симплексов) — выпуклая оболочка множества точек
- Триангуляция Делоне максимизирует минимальный угол (полезно, если надо избегать узких треугольников)



Переворачивание ребра

У произвольного четырёхугольника ABCD сумма углов $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$
Если сумма $\alpha+\gamma<180^\circ$, то разбиение ABD + BCD удовлетворяет критерию Делоне
Если сумма $\alpha+\gamma>180^\circ$, то разбиение ABD + BCD не удовлетворяет критерию Делоне, но разбиение ABC + ACD удовлетворяет (т. к. $\beta+\delta<180^\circ$)
Если $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$, то оба разбиения удовлетворяют критерию Делоне (все четыре точки лежат на одной окружности



Алгоритмы построения

- Наивный:
  - Создать произвольную триангуляцию
  - Для каждой пары соседних треугольников проверить критерий Делоне и при необходимости перевернуть ребро
  - Сложность: $O(n^2)$

Алгоритмы построения

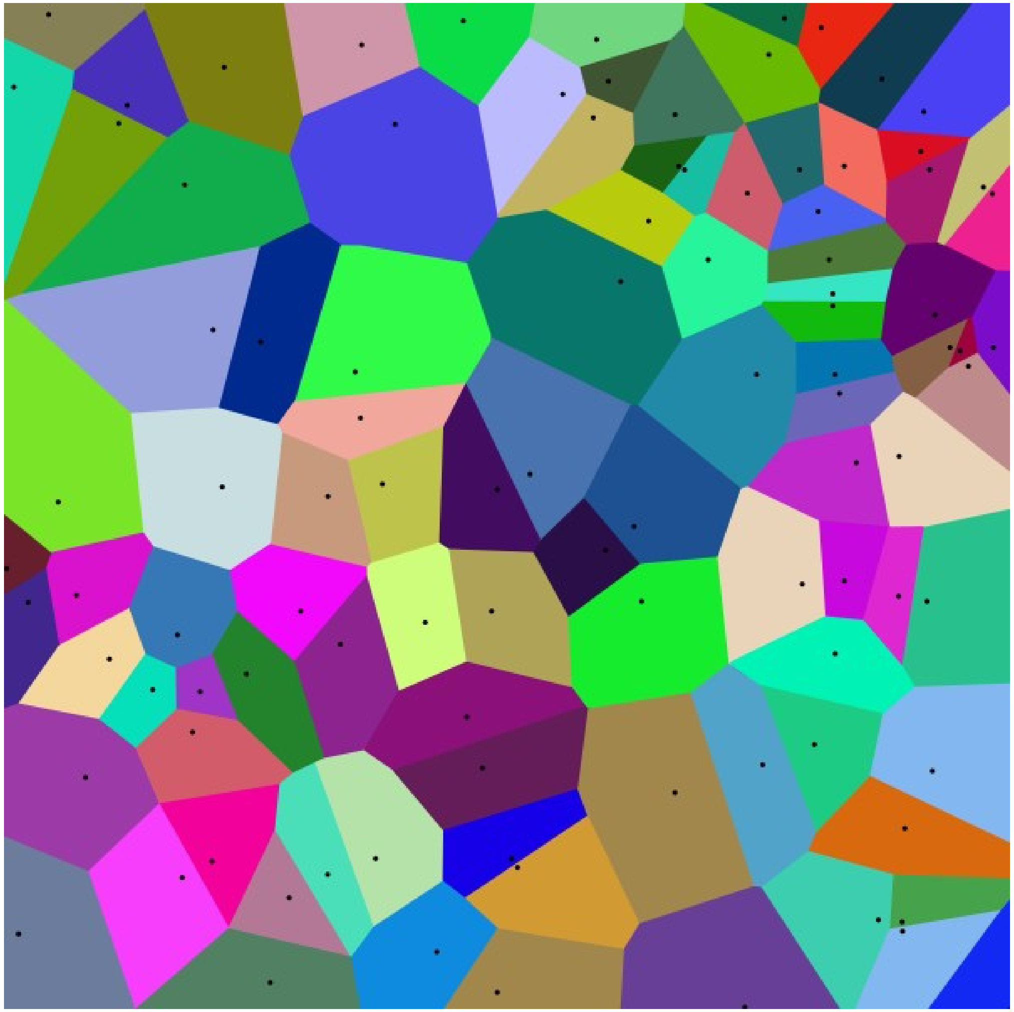
- Инкрементальный
  - Добавляем по одной точке
  - Для новой точки определяем треугольник, внутри которого она оказалась, делим его на три треугольника
  - Для них выполняем проверку критерия и переворачивание
  - Эффективная реализация в среднем занимает $O(n \cdot \log n)$

Алгоритмы построения

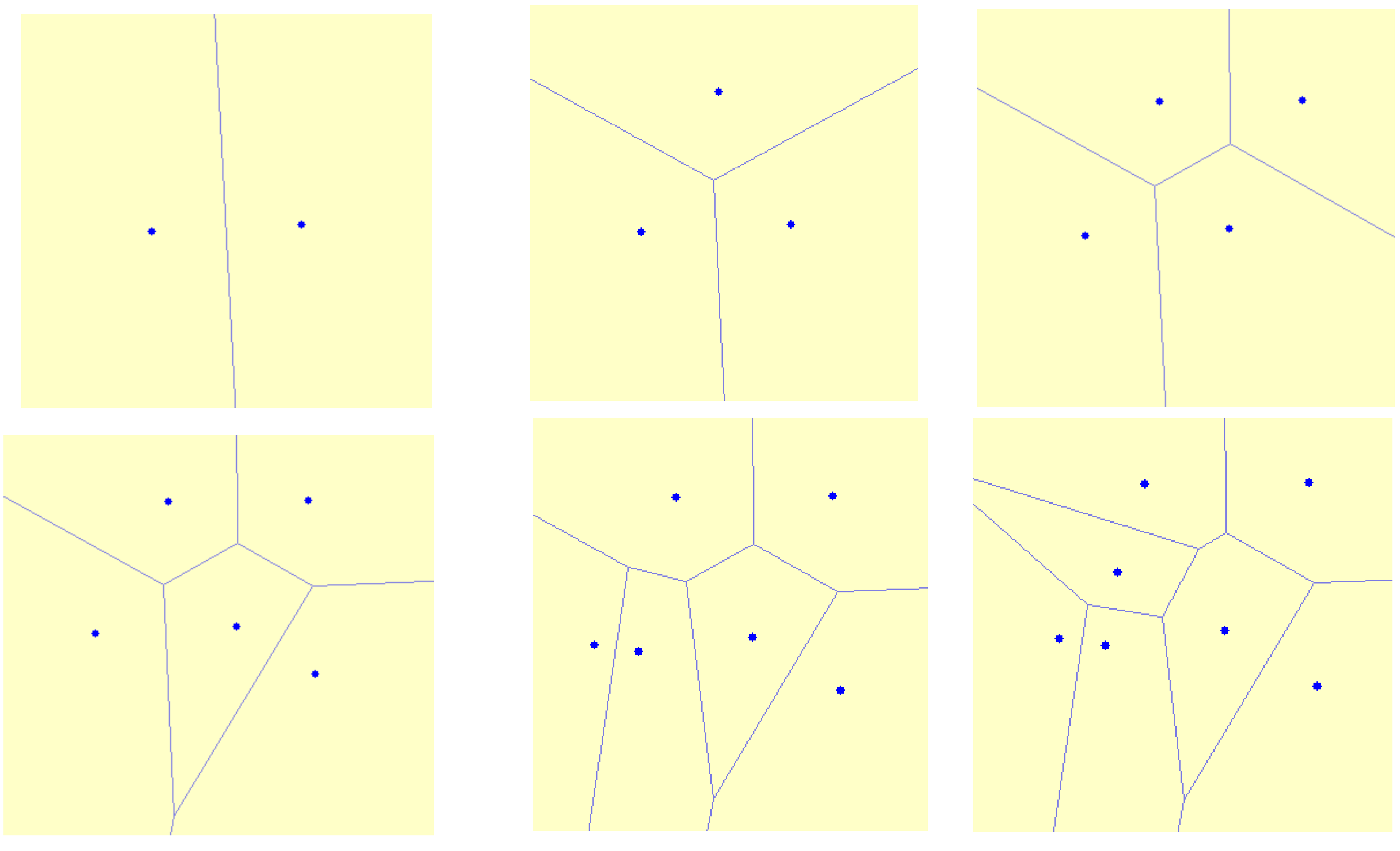
- Разделяй и властвуй (divide and conquer)
  - Рекурсивный алгоритм
  - Множество точек делится прямой линией на два подмножества, в каждом из которых рекурсивно строится триангуляция
  - Далее триангуляции по обе стороны линии объединяются определённым образом
  - Сложность $O(n \cdot \log n)$ в худшем случае

Диаграммы Вороного

Диаграмма Вороного конечного множества точек S на плоскости представляет такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества S, чем к любому другому элементу множества

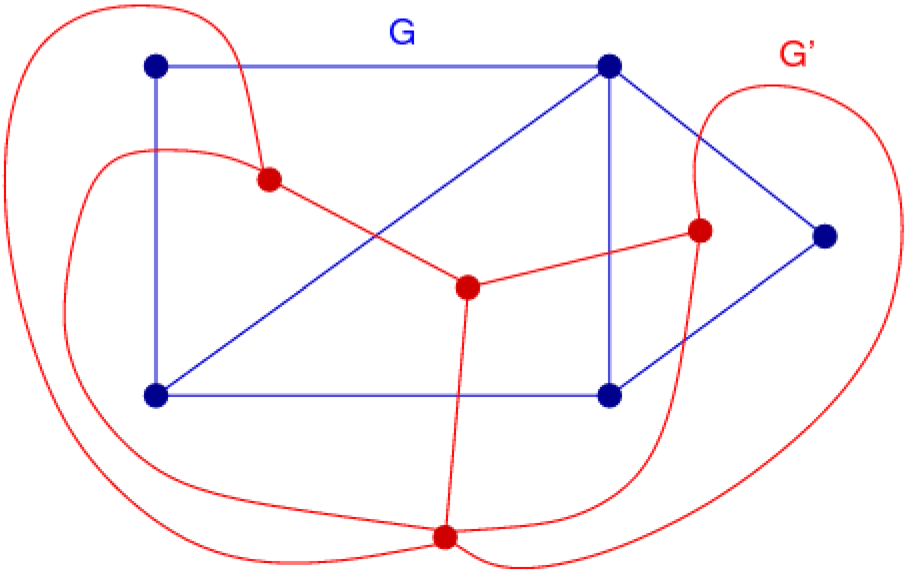


Диаграммы Вороного

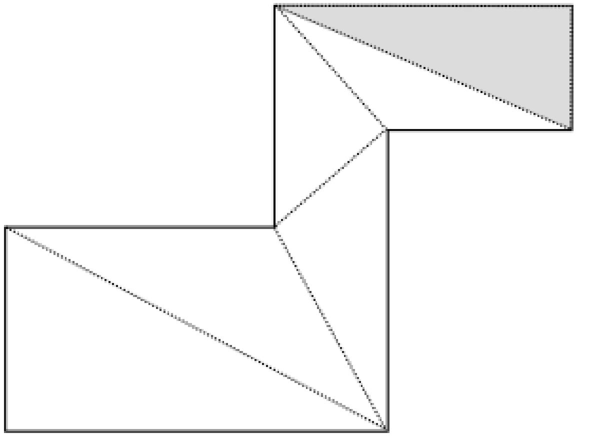


Диаграммы Вороного

- Триангуляция Делоне представляет собой двойственный граф к диаграмме Вороного



Триангуляция полигонов



- Алгоритм отсечения ушей
  - Ухо — треугольник, две стороны которого совпадают со сторонами фигуры, а третья лежит внутри
  - У любого многоугольника без отверстий есть хотя бы два уха
  - Алгоритм последовательно находит и отрезает уши, пока многоугольник не станет треугольником
  - Сложность — $O(n^2)$